Proceedings of IAM, V.13, N.1, 2024, pp.90-107
DOI: 10.30546/2225-0530.13.1.2024.021.

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ГУРСА-ДАРБУ*

М.А. Садыгов

Институт Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете, Баку, Азербайджан
e--mail: misreddin08@rambler.ru

Резюме. В данной работе рассматривается негладкая вариационная задача типа Гурса-Дарбу специального вида и получено необходимое и достаточное условие оптимальности ее решения. Сначала изучается выпуклая вариационная задача типа Гурса-Дарбу специального вида, а с ее помощью изучается невыпуклая вариационная задача типа Гурса-Дарбу специального вида.

Ключевые слова: Вариациионная задача, Гурса-Дарбу, необходимое условие.

AMS Subject Classification: 49J52.

.

1.Введение

Методика, использованная в работе, впервые была применена автором к одно переменной вариационной задаче в классе абсолютно непрерывных функций(см.[12]). Та же методология автором была применена к большому числу вариационных задач с многими переменными (см. [8,9,11,13,14]). Вариационная задача типа Гурса-Дарбу в классе двумерных абсолютно непрерывных функций рассматривалась в работах [8,11] и [1]. В рассматриваемой работе вариационная задача типа Гурса-Дарбу рассматривается в подпространствах класса двумерных абсолютно непрерывных функций. В выпуклой вариационной задаче типа Гурса-Дарбу сначала рассматривается возмущенная задача, с ее помощью строится двойственная задача, используется субдифференциал функционала специального вида в пространстве абсолютно непрерывных и двумерных абсолютно непрерывных функций и, наконец, с ее помощью получается необходимое и достаточное условие. Такая методология также используется в третьей и четвертой главах книги [15].Однако при решении конкретного вопроса необходимо рассматривать обобщения этой методологии. Вариационная задача типа Гурса-Дарбу играет важную роль при исследовании экстремальной задачи для дифференциального включения типа Гурса-Дарбу (см.[8]). Настоящая работа является развитием работы [8] автора.

Работа состоит из трех разделов. Во втором разделе рассматривается выпуклая вариациионная задача типа Гурса-Дарбу специального вида,

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики БГУ 05.03.2024

рассматривается возмущенная задача, с ее помощью строится двойственная задача, используя субдифференциал функционала специального вида в пространстве абсолютно непрерывных и двумерных абсолютно непрерывных функций получено необходимое и достаточное условие оптимальности решения вариационной задачи. В третьем разделе рассматривается невыпуклая вариациионная задача типа Гурса-Дарбу специального вида, используя субдифференциал Кларка, получено необходимое условие экстремума.

Если $1 \le p \le \infty$, $d \in R^n$, $x(\cdot) \in L_p^n[0,T]$, $y(\cdot) \in L_p^n[0,S]$ и $z(\cdot) \in L_p^n([0,T]\times[0,S])$, то множество функции которые имеют вид

$$u(t,s) = d + \int_0^t x(\tau)d\tau + \int_0^s y(\nu)d\nu + \int_0^t\int_0^s z(\tau,\nu)d\tau d\nu$$

обозначается через $A_p^n([0,T]\times[0,S])$, где $t \in [0,T]$, $s \in [0,S]$.

Отсюда следует, что $u(0,0) = d$, $u_t(t,0) = x(t)$, $u_s(0,s) = y(s)$ и $u_{ts}(t,s) = z(t,s)$.

Функция, входящая в линейное пространство $A_1^n([0,T]\times[0,S])$, называется двумерной абсолютно непрерывной функцией.

Известно, что $A_p^n([0,T]\times[0,S])$, $1 \le p < \infty$, линейное пространство и относительно нормы

$$\|u(\cdot)\|_{A_p^n} = \|u(0,0)\| + \Big(\int_0^T \|u_t(\tau,0)\|^p d\tau\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_0^S \|u_s(0,\nu)\|^p d\nu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_0^T\int_0^S \|u_{ts}(\tau,\nu)\|^p d\tau d\nu\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$A_p^n([0,T]\times[0,S])$ банахово пространство.

Из определения следует, что функция $u(t,s)$ однозначно определяется через $d \in R^n$, $x(\cdot) \in L_p^n[0,T]$, $y(\cdot) \in L_p^n[0,S]$ и $z(\cdot) \in L_p^n([0,T]\times[0,S])$. Поэтому функция $u(t,s)$ обозначается через $(d, x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot))$. Отсюда следует, что между сопряженным пространством пространства $A_p^n([0,T]\times[0,S])$ и сопряженным пространством пространства $R^n \times L_p^n[0,T]\times L_p^n[0,S]\times L_p^n([0,T]\times[0,S])$ имеется взаимно однозначное соответствие. Поэтому существуют $(c, a(\cdot), b(\cdot), \upsilon(\cdot)) \in R^n \times L_{p'}^n[0,T]\times L_{p'}^n[0,S]\times L_{p'}^n([0,T]\times[0,S])$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, такие, что каждый линейный непрерывный функционал ν^* на $A_p^n([0,T]\times[0,S])$, $1 \le p < \infty$, (т.е. $\nu^* \in A_p^n([0,T]\times[0,S])^*$) имеет вид:

$$\nu^*(u) = (c|u(0,0)) + \int_0^T (a(t)|u_t(t,0))dt + \int_0^S (b(s)|u_s(0,s))ds + \int_0^T\int_0^S (\upsilon(t,s)|u_{ts}(t,s))dtds,$$

где $(a|b)$ скалярное произведение в R^n. Для простоты функционал ν^* обозначается через $(c, a(\cdot), b(\cdot), \upsilon(\cdot))$, т.е. $\nu^* = (c, a(\cdot), b(\cdot), \upsilon(\cdot))$.

Символом $W^n_{p,1}[0,T]$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерывных отображений отрезка $[0,T]$ в R^n, первая производная которых принадлежит $L^n_p[0,T]$.

Пусть D метрическое пространство. Через $frm(D)$ обозначается векторное пространство всех мер Радона в D (см.[2, с.65]).

В дальнейшем равенства и включения, связанные с измеримыми функциями или отображениями понимаются как почти всюду.

2. Выпуклая вариационная задача типа Гурса-Дарбу

Пусть $f_0:[0,T]\times[0,S]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$, $\varphi_1:[0,T]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$, $\varphi_2:[0,S]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, $q:R^{4n}\to R_{+\infty}$ выпуклая функция, $A_1(t,s)$ и $A_2(t,s)$ непрерывные $n\times n$ матрицы, $1\le p<\infty$.

Рассмотрим минимизации функционала

$$J(u)=\int_0^T\int_0^S f_0(t,s,u(t,s),A_1(t,s)u_t(t,s)+A_2(t,s)u_s(t,s)+u_{ts}(t,s))dtds+$$
$$+\int_0^T\varphi_1(t,u(t,0),u_t(t,0))dt+\int_0^S\varphi_2(s,u(0,s),u_s(0,s))ds+q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S)) \qquad (1)$$

в пространстве $A^n_p([0,T]\times[0,S])$, где $1\le p<\infty$.

Обозначим $\overline{A}^n_p([0,T]\times[0,S])=\{u\in A^n_p([0,T]\times[0,S]):u(0,0)=0\}$.

Если $z(\cdot)\in\overline{A}^n_p([0,T]\times[0,S])$, то положим

$$\Phi(u,z)=\int_0^T\int_0^S f_0(t,s,u(t,s),A_1(t,s)(u_t(t,s)+z_t(t,s))+A_2(t,s)(u_s(t,s)+z_s(t,s))+$$
$$+u_{ts}(t,s)+z_{ts}(t,s))dtds+\int_0^T\varphi_1(t,u(t,0),u_t(t,0)+z_t(t,0))dt+$$
$$+\int_0^S\varphi_2(s,u(0,s),u_s(0,s)+z_s(0,s))ds+q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S)).$$

Ясно, что Φ-выпуклый функционал по (u,z) и $\Phi(u,0)=J(u)$. Для любого $z(\cdot)\in\overline{A}^n_p([0,T]\times[0,S])$ рассмотрим задачу минимизации

$$\inf_{u\in A^n_p([0,T]\times[0,S])}\Phi(u,z). \qquad (2)$$

Задача (2) называется возмущением задачи (1). Задача

$$\sup_{z^*\in\overline{A}^n_p([0,T]\times[0,S])^*}\{-\Phi^*(0,z^*)\}, \qquad (3)$$

называется двойственной к (1) по отношению к заданной функции Φ. Легко проверяется, что $\sup\limits_{z^*\in\overline{A}^n_p([0,T]\times[0,S])^*}\{-\Phi^*(0,z^*)\}\le\inf\limits_{u\in A^n_p([0,T]\times[0,S])}\Phi(u,0)$. Но особый интерес представляет равенство

$$\sup_{z^* \in \overline{A}_p^n([0,T]\times[0,S])^*} \{-\Phi^*(0,z^*)\} = \inf_{u \in A_p^n([0,T]\times[0,S])} \Phi(u,0). \qquad (4)$$

Положим $h(z) = \inf\{\Phi(u,z) : u \in A_p^n([0,T]\times[0,S])\}$. По предложению 2.5[6] h выпуклая функция. Задача (1) называется стабильной, если $h(0)$ конечно и h субдифференцируема в нуле. Из предложения 3.2.2 и замечания 3.2.3[15] следует, что если задача (1) стабильна, то соотношение (2.4) удовлетворяется и задача (3) имеет, по меньшей мере, одно решение.

Отметим, что каждый линейный непрерывный функционал ν^* на $\overline{A}_p^n([0,T]\times[0,S])$, $1 \le p < \infty$, (т.е. $\nu^* \in \overline{A}_p^n([0,T]\times[0,S])^*$) имеет вид:

$$\nu^*(u) = \int_0^T (a(t)|u_t(t,0))dt + \int_0^S (b(s)|u_s(0,s))ds + \int_0^T\int_0^S (\upsilon(t,s)|u_{ts}(t,s))dtds.$$

Пусть $\overline{u}$ являлась точкой минимума функционала $J(u)$ на пространстве $A_p^n([0,T]\times[0,S])$, т.е. $J(\overline{u})$ конечна и $J(\overline{u}) \le J(u)$ при $u \in A_p^n([0,T]\times[0,S])$.

Положим $f_0^0(t,s,y,v) = \inf\{(w|v) + f_0(t,s,y,w) : w \in R^n\}$,

$\varphi_1^0(t,y,v_1) = \inf\{(w_1|v_1) + \varphi_1(t,y,w_1) : w_1 \in R^n\}$,

$\varphi_2^0(s,y,v_2) = \inf\{(w_2|v_2) + \varphi_2(s,y,w_2) : w_2 \in R^n\}$, где $v \in R^n$, $v_1 \in R^n$, $v_2 \in R^n$.

Рассмотрим равенство, которое используется при доказательстве теоремы 2.1. Положив $\tau = \frac{t}{T}$, $\nu = \frac{s}{S}$, из теоремы 2.1.1 и следствия 2.1.1[8] получим, что существует решение уравнения $A_1(t,s)z_t(t,s) + A_2(t,s)z_s(t,s) + z_{ts}(t,s) = \omega(t,s)$ при $\omega(\cdot) \in L_p^n([0,T]\times[0,S])$, $z(t,0) = \psi_1(t)$, $z(0,s) = \psi_2(s)$, где $\psi_1(\cdot) \in W_{p,1}^n[0,T]$, $\psi_2(\cdot) \in W_{p,1}^n[0,S]$, $\psi_1(0) = \psi_2(0)$. Поэтому

$$\tilde{M} = \{(u(\cdot), z_t(t,0), z_s(0,s), A_1(t,s)z_t(t,s) + A_2(t,s)z_s(t,s) + z_{ts}(t,s) : (u(\cdot), z(\cdot)) \in$$
$$\in A_p^n([0,T]\times[0,S]) \times A_p^n([0,T]\times[0,S])\} = A_p^n([0,T]\times[0,S]) \times L_p^n[0,T] \times L_p^n[0,S] \times L_p^n([0,T]\times[0,S]).$$

Тогда оообозначив

$$I(u(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot), \omega(\cdot)) = \int_0^T\int_0^S f_0(t,s,u(t,s),\omega(t,s))dtds + \int_0^T \varphi_1(t,u(t,0),y_1(t))dt +$$
$$+ \int_0^S \varphi_2(s,u(0,s),y_2(s))ds + q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S)),$$

$$\mathrm{dom}\, I(u(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot), \omega(\cdot)) = \{(u(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot), \omega(\cdot)) \in$$
$$\in A_p^n([0,T]\times[0,S]) \times L_p^n[0,T] \times L_p^n[0,S] \times L_p^n([0,T]\times[0,S]) : I(u(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot), \omega(\cdot)) < +\infty\}$$

имеем, что

$$\mathrm{dom}\, I(u(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot), \omega(\cdot)) - \tilde{M} = A_p^n([0,T]\times[0,S]) \times L_p^n[0,T] \times L_p^n[0,S] \times L_p^n([0,T]\times[0,S])$$

при $\mathrm{dom}\, I(u(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot), \omega(\cdot)) \ne \varnothing$.

Если $\Omega \subset R^n$, то обозначим $\delta_\Omega(x) = \begin{cases} 0: & x \in \Omega, \\ +\infty: & x \notin \Omega. \end{cases}$

Положим

$$Q = \{u \in A_p^n([0,T]\times[0,S]) : \int_0^T\int_0^S f_0^0(t,s,u(t,s),p(t,s))dtds < +\infty\},$$

$$Q_1 = \{x(\cdot) \in W_{p,1}^n[0,T] : \int_0^T \varphi_1^0(t,x(t),v_1(t) - \int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds)dt < +\infty\},$$

$$Q_2 = \{y(\cdot) \in W_{p,1}^n[0,S] : \int_0^S \varphi_2^0(s,y(s),v_2(s) - \int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt)ds < +\infty\}.$$

Теорема 2.1. Пусть $f_0 : [0,T]\times[0,S]\times R^{2n} \to R_{+\infty}$, $\varphi_1 : [0,T]\times R^{2n} \to R_{+\infty}$, $\varphi_2 : [0,S]\times R^{2n} \to R_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, $q : R^{4n} \to R_{+\infty}$ выпуклая функция. Для того чтобы $\bar{u}$ являлась точкой минимума функционала $J(u)$ на пространстве $A_p^n([0,T]\times[0,S])$, $1 \le p < \infty$, достаточно, а если существуют функции $\tilde{u} \in A_p^n([0,T]\times[0,S])$, $\alpha(\cdot) \in L_1([0,T]\times[0,S])$, $\nu(\cdot) \in L_1[0,T]$, $\beta(\cdot) \in L_1[0,S]$, числа $r > 0$ и $c \ge 0$ такие, что функции $f_0(t,s,\tilde{u}(t,s)+y, A_1(t,s)\tilde{u}_t(t,s) + A_2(t,s)\tilde{u}_s(t,s) + \tilde{u}_{ts}(t,s))$, $\psi_1(t,\tilde{u}(t,0)+y,\tilde{u}_t(t,0))$, $\psi_2(s,\tilde{u}(0,s)+y,\tilde{u}_s(0,s))$ суммируемы при $y \in R^n$, $\|y\| \le r$, $\alpha(t,s) - c\|z\|^p \le f_0(t,s,z)$, $\nu(t) - c\|x\|^p \le \varphi_1(t,x)$, $\beta(s) - c\|y\|^p \le \varphi_2(s,y)$ при $z \in R^{2n}$, $x \in R^{2n}$, $y \in R^{2n}$, $t \in [0,T]$, $s \in [0,S]$, функция $q : R^{4n} \to R_{+\infty}$ полунепрерывна снизу и функция $q(\tilde{u}(0,0),\cdot)$ непрерывна в точке $(\tilde{u}(T,0),\tilde{u}(0,S),\tilde{u}(T,S))$, то необходимы, чтобы нашлись функция $p(\cdot) \in L_{p'}^n([0,T]\times[0,S])$, меры $\lambda \in \mathrm{frm}([0,T]\times[0,S])^n$, $\mu \in \mathrm{frm}[0,T]^n$, $\gamma \in \mathrm{frm}[0,S]^n$, функционал $v^* = (0, v_1(\cdot), v_2(\cdot), v(\cdot)) \in A_p^n([0,T]\times[0,S])^*$ и векторы $(\bar{c}, d_1, d_2, d) \in R^{4n}$ такие, что

1) $v^*(u) = (\bar{c} - d_1 - d_2 + d|u(0,0)) + (d_1 - d|u(T,0)) + (d_2 - d|u(0,S)) + (d|u(T,S)) +$

$$+\int_0^T\int_0^S (u(t,s)|d\lambda) + \int_0^T (u(t,0)|d\mu) + \int_0^S (u(0,s)|d\gamma)$$

при $u \in A_p^n([0,T]\times[0,S])$,

2) $p(t,s) = \int_0^s A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu - \int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds + \int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau - \int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt + v(t,s),$

3) $\omega(t,s) \in \partial f_0^0(t,s,\bar{u}(t,s), p(t,s))$,

4) $\omega_1(t) \in \partial\varphi_1^0(t,\bar{u}(t,0),v_1(t) - \int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds)$,

5) $\omega_2(s) \in \partial\varphi_2^0(s,\bar{u}(0,s),v_2(s) - \int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt)$,

6) $(\overline{c}-d_1-d_2+d, d_1-d, d_2-d, d)\in \partial q(\overline{u}(0,0), \overline{u}(T,0), \overline{u}(0,S), \overline{u}(T,S))$,

7) $f_0^0(t,s,\overline{u}(t,s), p(t,s)) = (p(t,s)|A_1(t,s)\overline{u}_t(t,s)+A_2(t,s)\overline{u}_s(t,s)+\overline{u}_{ts}(t,s))+$
$+f_0(t,s,\overline{u}(t,s), A_1(t,s)\overline{u}_t(t,s)+A_2(t,s)\overline{u}_s(t,s)+\overline{u}_{ts}(t,s)),$

8) $\varphi_1^0(t,\overline{u}(t,0), v_1(t)-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds) = (v_1(t)-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds|\overline{u}_t(t,0))+$
$+\varphi_1(t,\overline{u}(t,0),\overline{u}_t(t,0))$,

9) $\varphi_2^0(s,\overline{u}(0,s), v_2(s)-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt) = (v_2(s)-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt|\overline{u}_s(0,s))+$
$+\varphi_2(s,\overline{u}(0,s),\overline{u}_s(0,s))$,

10) $\max\limits_{u\in Q}\int_0^T\int_0^S(u(t,s)|d\lambda_s)=\int_0^T\int_0^S(\overline{u}(t,s)|d\lambda_s)$, 11) $\max\limits_{x\in Q_1}\int_0^T(x(t)|d\mu_s)=\int_0^T(\overline{u}(t,0)|d\mu_s)$,

12) $\max\limits_{y\in Q_2}\int_0^S(y(s)|d\gamma_s)=\int_0^S(\overline{u}(0,s)|d\gamma_s)$,

где $\lambda(E)=\iint_E \omega(t,s)dtds+\lambda_s(E)$, $\mu(E_1)=\int_{E_1}\omega_1(t)dt+\mu_s(E_1)$, $\gamma(E_2)=\int_{E_2}\omega_2(s)ds+\gamma_s(E_2)$

Лебеговское разложение λ,μ и ν соответственно, $E\subset([0,T]\times[0,S])^n$, $E_1\subset[0,T]^n$, $E_2\subset[0,S]^n$ -Борелевские множества.

Доказательство. Достаточность теоремы непосредственно проверяется.

Необходимость. Рассмотрим возмущением задачи (1). Поэтому рассмотрим функционал
$\Phi(u,z)$, где $u\in A_p^n([0,T]\times[0,S])$, $z\in \overline{A}_p^n([0,T]\times[0,S])$.

Положим $h(z)=\inf\{\Phi(u,z): u\in A_p^n([0,T]\times[0,S])\}$. Покажем, что h субдифференцируема в нуле, то есть задача $\inf\{J(u): u\in A_p^n([0,T]\times[0,S])\}$ стабильна. По предложению 8.3.4 [4, с.360] функционал

$$J_0(z,z_1,z_2,c_1,c_2,c_3)=\int_0^T\int_0^S f_0(t,s,\tilde{u}(t,s)+z(t,s),\ A_1(t,s)\tilde{u}_t(t,s)+A_2(t,s)\tilde{u}_s(t,s)+\tilde{u}_{ts}(t,s))dtds+$$
$$+\int_0^T\varphi_1(t,\tilde{u}(t,0)+z_1(t),\tilde{u}_t(t,0))dt+\int_0^S\varphi_2(s,\tilde{u}(0,s)+z_2(s),\tilde{u}_s(0,s))ds+$$
$$+q(\tilde{u}(0,0),\tilde{u}(T,0)+c_1,\tilde{u}(0,S)+c_2,\tilde{u}(T,S)+c_3),$$

непрерывен на $C^n([0,T]\times[0,S])\times C^n([0,T])\times C^n([0,S])\times R^{3n}$ в точке нуль. Множество $A_p^n([0,T]\times[0,S])$, $1\le p<\infty$, с нормой $\|u\|_{C_p^n}=\max\limits_{(t,s)\in[0,T]\times[0,S]}\|u(t,s)\|$ обозначим через $C_p^n([0,T]\times[0,S])$. Легко проверяется, что ссуществует число $\overline{k}(T,S)>0$ такое, что $\|u\|_{C_p^n}\le\overline{k}(T,S)\|u(\cdot)\|_{A_p^n}$ при $u\in A_p^n([0,T]\times[0,S])$. Так как $\|z(t,0)\|_{C^n}+\|z(0,s)\|_{C^n}+\|z(t,s)\|_{C^n}\le 3\overline{k}(T,S)\|z(\cdot)\|_{A_p^n}$ при $z\in\overline{A}_p^n([0,T]\times[0,S])$, то функционал

$$J_1(z)=\int_0^T\int_0^S f_0(t,s,\tilde u(t,s)+z(t,s),A_1(t,s)\tilde u_t(t,s)+A_2(t,s)\tilde u_s(t,s)+\tilde u_{ts}(t,s))dtds+$$
$$+\int_0^T\varphi_1(t,\tilde u(t,0)+z(t,0),\tilde u_t(t,0))dt+\int_0^S\varphi_2(s,\tilde u(0,s)+z(0,s),\tilde u_s(0,s))ds+$$
$$+q(\tilde u(0,0),\tilde u(T,0)+z(T,0),\tilde u(0,S)+z(0,S),u(T,S)+z(T,S))$$

непрерывен в точке нуль относительно топологии $\overline{A}_p^n([0,T]\times[0,S])$. Из выпуклости и непрерывности $J_1(z)$ в нуле следует, что существуют такие $\alpha>0$ и M, что $J_1(u)\le M$ при $u\in\{z\in\overline{A}_p^n:\|z\|_{\overline{A}_p^n}\le\alpha\}$. Если $z\in\overline{A}_p^n$, $\|z\|_{\overline{A}_p^n}\le\alpha$, то положив $u_z(t,s)=\tilde u(t,s)-z(t,s)$ получим, что

$$h(z)=\inf\{\Phi(u,z):u\in A_p^n([0,T]\times[0,S])\}\le\Phi(u_z,z)=J_1(-z)\le M\,.$$

Используя предложение 1.5.2 [15, c.31] отсюда следует, что h субдифференцируема в точке нуль. Поэтому из замечания 3.2.3 и из предложения 3.2.4 [15, с. 60, 62] вытекает, что все решения $\overline{u}(\cdot)$ задачи $\inf\{J(u):u\in A_p^n([0,T]\times[0,S])\}$ и все решения $-v^*=-(v_1(\cdot),v_2(\cdot),v(\cdot))$ задачи $\sup\{-\Phi^*(0,\tilde v^*):\tilde v^*\in(\overline{A}_p^n)^*\}$ связаны экстремальным соотношением

$$\Phi(\overline{u},0)+\Phi^*(0,-v^*)=0\,. \qquad (5)$$

По определению

$$\Phi^*(0,-v^*)=\sup_{u\in A_p^n,\ z\in\overline{A}_p^n}\{-\int_0^T(v_1(t)|z_t(t,0))dt-\int_0^S(v_2(s)|z_s(0,s))ds-\int_0^T\int_0^S(v(t,s)|z_{ts}(t,s))dtds-$$
$$-\int_0^T\int_0^S f_0(t,s,u(t,s),A_1(t,s)(u_t(t,s)+z_t(t,s))+A_2(t,s)(u_s(t,s)+z_s(t,s))+u_{ts}(t,s)+z_{ts}(t,s))dtds-$$
$$-\int_0^T\varphi_1(t,u(t,0),u_t(t,0)+z_t(t,0))dt-\int_0^S\varphi_2(s,u(0,s),u_s(0,s)+z_s(0,s))ds-$$
$$-q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S))\}=$$

$$= \sup_{u\in A_p^n([0,T]\times[0,S]),\ \ z\in \bar{A}_p^n} \{\int_0^T (v_1(t)|u_t(t,0))dt + \int_0^S (v_2(s)|u_s(0,s))ds + \int_0^T\int_0^S (v(t,s)|u_{ts}(t,s))dtds -$$

$$-\int_0^T (v_1(t)|u_t(t,0)+z_t(t,0))dt - \int_0^S (v_2(s)|u_s(0,s)+z_s(0,s))ds - \int_0^T\int_0^S (v(t,s)|u_{ts}(t,s)+z_{ts}(t,s))dtds -$$

$$-\int_0^T\int_0^S f_0(t,s,u(t,s),A_1(t,s)(u_t(t,s)+z_t(t,s))+A_2(t,s)(u_s(t,s)+z_s(t,s))+u_{ts}(t,s)+z_{ts}(t,s))dtds -$$

$$-\int_0^T \varphi_1(t,u(t,0),u_t(t,0)+z_t(t,0))dt - \int_0^S \varphi_2(s,u(0,s),u_s(0,s)+z_s(0,s))ds -$$

$$-q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S))\} = \sup_{u\in A_p^n([0,T]\times[0,S])} \{\int_0^T (v_1(t)|u_t(t,0))dt + \int_0^S (v_2(s)|u_s(0,s))ds +$$

$$+\int_0^T\int_0^S (v(t,s)|u_{ts}(t,s))dtds + \sup_{z\in A_p^n([0,T]\times[0,S])} \{-\int_0^T (v_1(t)|z_t(t,0))dt - \int_0^S (v_2(s)|z_s(0,s))ds -$$

$$-\int_0^T\int_0^S (v(t,s)|z_{ts}(t,s))dtds - \int_0^T\int_0^S f_0(t,s,u(t,s),A_1(t,s)z_t(t,s)+A_2(t,s)z_s(t,s)+z_{ts}(t,s))dtds -$$

$$-\int_0^T \varphi_1(t,u(t,0),z_t(t,0))dt - \int_0^S \varphi_2(s,u(0,s),z_s(0,s))ds\} - q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S))\} =$$

$$= \sup_{u\in A_p^n([0,T]\times[0,S])} \{\int_0^T (v_1(t)|u_t(t,0))dt + \int_0^S (v_2(s)|u_s(0,s))ds +$$

$$+\int_0^T\int_0^S (v(t,s)|u_{ts}(t,s))dtds + \sup_{(y_1(\cdot),y_2(\cdot),\omega(\cdot),y(\cdot))} \{-\int_0^T (v_1(t)|y_1(t))dt - \int_0^S (v_2(s)|y_2(s))ds -$$

$$-\int_0^T\int_0^S (v(t,s)|y(t,s))dtds - \int_0^T\int_0^S f_0(t,s,u(t,s),\omega(t,s))dtds - \int_0^T \varphi_1(t,u(t,0),y_1(t))dt -$$

$$-\int_0^S \varphi_2(s,u(0,s),y_2(s))ds - \delta_M(u(.),y_1(\cdot),y_2(\cdot),\omega(\cdot),y(\cdot))\} - q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S))\},$$

где $y_1(\cdot)\in L_p^n[0,T]$, $y_2(\cdot)\in L_p^n[0,S]$, $\omega(\cdot),y(\cdot)\in L_p^n([0,T]\times[0,S])$,

$$M = \{(u(.),z_t(t,0),z_s(0,s),A_1(t,s)z_t(t,s)+A_2(t,s)z_s(t,s)+z_{ts}(t,s),z_{ts}(t,s)):$$
$$(u(.),z(\cdot))\in A_p^n([0,T]\times[0,S])\times A_p^n([0,T]\times[0,S])\}.$$

Из условия $\alpha(t,s)-c\|z\|^p \le f(t,s,z)$, $\nu(t)-c\|x\|^p \le \varphi_1(t,x)$, $\beta(s)-c\|y\|^p \le \varphi_2(s,y)$ при $z\in R^{2n}$, $x\in R^{2n}$, $y\in R^{2n}$ и из леммы Фату (см. [3], с.97) следует, что функционал

$$\int_0^T\int_0^S f_0(t,s,u(t,s),\omega(t,s))dtds + \int_0^T \varphi_1(t,u(t,0),y_1(t))dt + \int_0^S \varphi_2(s,u(0,s),y_2(s))ds +$$
$$+q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S))$$

является полу непрерывным снизу в $A_p^n([0,T]\times[0,S])\times L_p^n[0,T]\times L_p^n[0,S]\times L_p^n([0,T]\times[0,S])$ относительно переменной $(u(\cdot).y_1(\cdot),y_2(\cdot),\omega(\cdot))$.

По теореме 4.4.11[7] существуют $a(\cdot)\in L^n_{p'}[0,T]$, $b(\cdot)\in L^n_{p'}[0,S]$, $p_1(\cdot),\ p(\cdot)\in L^n_{p'}([0,T]\times[0,S])$ такие, что

$$\Phi^*(0,-v^*)=\sup_{u\in A^n_p([0,T]\times[0,S])}\{\int_0^T(v_1(t)|u_t(t,0))dt+\int_0^S(v_2(s)|u_s(0,s))ds+$$
$$+\int_0^T\int_0^S(v(t,s)|u_{ts}(t,s))dtds-q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S))+$$
$$+\sup_{(y_1(\cdot),y_2(\cdot),\omega(\cdot),y(\cdot))}\{-\int_0^T(v_1(t)+a(t)|y_1(t))dt-\int_0^S(v_2(s)+b(s)|y_2(s))ds-$$
$$-\int_0^T\int_0^S(v(t,s)+p_1(t,s)|y(t,s))dtds-\int_0^T\int_0^S(p(t,s)|\omega(t,s))dtds-\int_0^T\int_0^S f_0(t,s,u(t,s),\omega(t,s))dtds-$$
$$-\int_0^T\varphi_1(t,u(t,0),y_1(t))dt-\int_0^S\varphi_2(s,u(0,s),y_2(s))ds\}$$

и
$$\sup_{z(\cdot)\in A^n_p([0,T]\times[0,S])}\{\int_0^T(z_t(t,0)|a(t))dt+\int_0^S(z_s(0,s)|b(s))ds+$$
$$+\int_0^T\int_0^S(A_1(t,s)z_t(t,s)+A_2(t,s)z_s(t,s)+z_{ts}(t,s))|p(t,s))dtds+\int_0^T\int_0^S(z_{ts}(t,s))|p_1(t,s))dtds\}=0,$$

где $y_1(\cdot)\in L^n_p[0,T]$, $y_2(\cdot)\in L^n_p[0,S]$, $\omega(\cdot),y(\cdot)\in L^n_p([0,T]\times[0,S])$. Из первого соотношения следует, что $p_1(t,s)=-v(t,s)$ и из второго соотношения следует, что

$$\int_0^T(z_t(t,0)|a(t))dt+\int_0^S(z_s(0,s)|b(s))ds+\int_0^T\int_0^S(A_1(t,s)z_t(t,s)+A_2(t,s)z_s(t,s)+z_{ts}(t,s))|p(t,s))dtds-$$
$$-\int_0^T\int_0^S(z_{ts}(t,s))|v(t,s))dtds=0$$

при $z(\cdot)\in A^n_p([0,T]\times[0,S])$. Ясно, что

$$\int_0^T\int_0^S(A_1(t,s)z_t(t,s)+A_2(t,s)z_s(t,s)+z_{ts}(t,s))|p(t,s))dtds=\int_0^T\int_0^S(A_1(t,s)z_t(t,s)|p(t,s))dtds+$$
$$+\int_0^T\int_0^S(A_2(t,s)z_s(t,s)|p(t,s))dtds+\int_0^T\int_0^S(z_{ts}(t,s)|p(t,s))dtds=$$
$$=\int_0^T\int_0^S(z_t(t,s)|d(\int_0^s A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds))dt+$$
$$+\int_0^T\int_0^S(z_s(t,s)|d(\int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt))ds+$$
$$+\int_0^T\int_0^S(z_{ts}(t,s)|p(t,s))dtds=\int_0^T(z_t(t,0)|\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds)dt-$$
$$-\int_0^T\int_0^S(z_{ts}(t,s)|\int_0^s A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu-\int_0^S A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu)dtds+\int_0^S(z_s(0,s)|\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt)ds-$$

$$-\int_0^T\int_0^S (z_{ts}(t,s)\Big|\int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau-\int_0^T A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau)dtds+\int_0^T\int_0^S (z_{ts}(t,s)\big|p(t,s))dtds,$$

где A^* обозначает транспонирование матрицы A. Тогда получим, что

$$\int_0^T (z_t(t,0)\big|a(t))dt+\int_0^S (z_s(0,s)\big|b(s))ds+\int_0^T (z_t(t,0)\Big|\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds)dt-$$

$$-\int_0^T\int_0^S (z_{ts}(t,s)\Big|\int_0^s A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu-\int_0^S A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu)dtds+$$

$$+\int_0^S (z_s(0,s)\Big|\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt)ds-\int_0^T\int_0^S (z_{ts}(t,s)\Big|\int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau-\int_0^T A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau)dtds+$$

$$+\int_0^T\int_0^S (z_{ts}(t,s)\big|p(t,s))dtds-\int_0^T\int_0^S (z_{ts}(t,s)\big|v(t,s))dtds=0.$$

Отсюда следует, что $a(t)=-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds$, $b(s)=-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt$,

$$p(t,s)=\int_0^s A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds+\int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt+v(t,s).$$

Поэтому получим, что

$$\sup_{(y_1(\cdot),y_2(\cdot),\omega(\cdot),y(\cdot))}\{-\int_0^T (v_1(t)+a(t)\big|y_1(t))dt-\int_0^S (v_2(s)+b(s)\big|y_2(s))ds-$$

$$-\int_0^T\int_0^S (v(t,s)+p_1(t,s)\big|y(t,s))dtds-\int_0^T\int_0^S (p(t,s)\big|\omega(t,s))dtds-$$

$$-\int_0^T\int_0^S f_0(t,s,u(t,s),\omega(t,s))dtds-\int_0^T \varphi_1(t,u(t,0),y_1(t))dt-\int_0^S \varphi_2(s,u(0,s),y_2(s))ds\}=$$

$$=\sup_{(y_1(\cdot),y_2(\cdot),\omega(\cdot),y(\cdot))}\{-\int_0^T (v_1(t)-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds\Big|y_1(t))dt-$$

$$-\int_0^S (v_2(s)-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt\Big|y_2(s))ds-\int_0^T\int_0^S (\int_0^s A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu-$$

$$-\int_0^S A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu+\int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau-\int_0^T A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau+v(t,s)\Big|\omega(t,s))dtds-$$

$$-\int_0^T\int_0^S f_0(t,s,u(t,s),\omega(t,s))dtds-\int_0^T \varphi_1(t,u(t,0),y_1(t))dt-\int_0^S \varphi_2(s,u(0,s),y_2(s))ds\}.$$

Тогда по предложению 8.3.2[4] имеем, что

$$\Phi^*(0,-v^*)=\sup_{u\in A_p^n([0,T]\times[0,S])}\{\int_0^T(v_1(t)|u_t(t,0))dt+\int_0^S(v_2(s)|u_s(0,s))ds+\int_0^T\int_0^S(v(t,s)|u_{ts}(t,s))dtds-$$

$$-\int_0^T\int_0^S f_0^0(t,s,u(t,s),p(t,s))dtds-\int_0^T\varphi_1^0(t,u(t,0),v_1(t)-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds)dt-$$

$$-\int_0^S\varphi_2^0(s,u(0,s),v_2(s)-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt)ds-q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S))\},$$

где $p(t,s)=\int_0^s A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds+\int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt+v(t,s).$

Обозначив $\bar v^*=(0,a(\cdot),b(\cdot),\upsilon(\cdot))\in A_p^n([0,T]\times[0,S])^*$ и

$$J_2(u)=\int_0^T\int_0^S f_0^0(t,s,u(t,s),p(t,s))dtds+\int_0^T\varphi_1^0(t,u(t,0),v_1(t)-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds)dt+$$

$$+\int_0^S\varphi_2^0(s,u(0,s),v_2(s)-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt)ds+q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S))$$

получим, что существует функция $p(\cdot)\in L_{p'}^n([0,T]\times[0,S])$, где

$$p(t,s)=\int_0^s A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds+\int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt+v(t,s),$$

такая, что $\Phi^*(0,-v^*)=J_2^*(\bar v^*)$. Из соотношения (5) следует, что $J_2^*(\bar v^*)+J(\bar u)=0$. По условию из предложения 2.5 (см.[6, с.28]) следует, что $u\to J_2(u)$ выпуклый функционал. Тогда используя неравенство Юнга-Фенхеля (см.[4, с.183]) получим, что

$$J_2^*(\bar v^*)=\int_0^T(v_1(t)|\bar u_t(t,0))dt+\int_0^S(v_2(s)|\bar u_s(0,s))ds+\int_0^T\int_0^S(v(t,s)|\bar u_{ts}(t,s))dtds-J_2(\bar u),$$

и

$$J_2(\bar u)=\int_0^T(v_1(t)-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds|\bar u_t(t,0))dt+\int_0^S(v_2(s)-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt|\bar u_s(0,s))ds+$$

$$+\int_0^T\int_0^S(p(t,s)|A_1(t,s)\bar u_t(t,s)+A_2(t,s)\bar u_s(t,s)+\bar u_{ts}(t,s))dtds+J(\bar u),$$

где $p(t,s)=\int_0^s A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds+\int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt+v(t,s).$

Из первого равенства следует, что $\bar v^*\in\partial J_2(\bar u)$. Из второго равенства имеем

$$f_0^0(t,s,\bar u(t,s),p(t,s))=(p(t,s)|A_1(t,s)\bar u_t(t,s)+A_2(t,s)\bar u_s(t,s)+\bar u_{ts}(t,s))+$$
$$+f_0(t,s,\bar u(t,s),A_1(t,s)\bar u_t(t,s)+A_2(t,s)\bar u_s(t,s)+\bar u_{ts}(t,s)),$$

$$\varphi_1^0(t,\bar u(t,0),v_1(t)-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds)=(v_1(t)-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds|\bar u_t(t,0))+\varphi_1(t,\bar u(t,0),\bar u_t(t,0)),$$

$$\varphi_2^0(s,\bar u(0,s),v_2(s)-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt)=(v_2(s)-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt|\bar u_s(0,s))+\varphi_2(s,\bar u(0,s),\bar u_s(0,s)).$$

Так как для любого $\tilde p(\cdot)\in L^n_{p'}([0,T]\times[0,S])$, $z_1(\cdot)\in L^n_{p'}[0,T]$ и $z_2(\cdot)\in L^n_{p'}[0,S]$ верны соотношения

$$f_0^0(t,s,\tilde u(t,s)+y;\tilde p(t,s))\le (A_1(t,s)\tilde u_t(t,s)+A_2(t,s)\tilde u_s(t,s)+\tilde u_{ts}(t,s)|\tilde p(t,s))+$$
$$+f_0(t,s,\tilde u(t,s)+y,A_1(t,s)\tilde u_t(t,s)+A_2(t,s)\tilde u_s(t,s)+\tilde u_{ts}(t,s)),$$
$$\varphi_1^0(t,\tilde u(t,0)+y;z_1(t))\le(\tilde u_t(t,0)|z_1(t))+\varphi_1(t,\tilde u(t,0)+y,\tilde u_t(t,0)),$$
$$\varphi_2^0(s,\tilde u(0,s)+y;z_2(s))\le(\tilde u_s(0,s)|z_2(s))+\varphi_2(s,\tilde u(0,s)+y,\tilde u_s(0,s))$$

при $y\in R^n$, $\|y\|\le r$ и число $J_2(\tilde u)$ конечно, то по условию имеем, что для функционала $J_2(u)$ удовлетворяются условия теоремы 6.1[10]. Применяя теорему 6.1[10] к $J_2(u)$ в точке $\bar u$ получим справедливость теоремы 2.1.

Замечание 2.1. Если $f_0:[0,T]\times[0,S]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$, $\varphi_1:[0,T]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$, $\varphi_2:[0,S]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$ нормальные интегранты, $q:R^{4n}\to R_{+\infty}$ собственная функция и выполняются соотношения 1)-12) теоремы 2.1, то $\bar u$ также является точкой минимума функционала $J_0(u)$ на пространстве $A^n_p([0,T]\times[0,S])$, $1\le p<\infty$.

Замечание 2.2. Если $A_1(t,s)=0$, $A_2(t,s)=0$, то из равенства

$$p(t,s)=\int_0^s A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds+\int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt+v(t,s)$$

следует, что $p(t,s)=v(t,s)$ при $(t,s)\in[0,T]\times[0,S]$. Если $A_1(t,s)=0$, $A_2(t,s)=0$, то положив $p(t,s)=v(t,s)$ из теоремы 2.1 можно получить необходимое и достаточное условие для минимизации функционала $J(u)$ в пространстве $A^n_p([0,T]\times[0,S])$, где $1\le p<\infty$.

Теорема 2.2. Пусть $f_0:[0,T]\times[0,S]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$, $\varphi_1:[0,T]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$, $\varphi_2:[0,S]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, $q:R^{4n}\to R_{+\infty}$ выпуклая функция. Для того чтобы $\bar u$ являлась точкой минимума функционала $J(u)$ на пространстве $A^n_p([0,T]\times[0,S])$, $1\le p<\infty$, достаточно, а если при $\tilde u(t,s)=\bar u(t,s)$ удовлетворяются условия теоремы 2.1 и необходимо, чтобы нашлись функции $p(\cdot)\in L^n_{p'}([0,T]\times[0,S])$, $v(\cdot)\in A^n_1([0,T]\times[0,S])$, $v_1(\cdot)\in W^n_{1,1}[0,T]$, $v_2(\cdot)\in W^n_{1,1}[0,S]$ и $v(T,s)=v(t,S)=const$ при $t\in[0,T]$, $s\in[0,S]$ такие, что

1) $v_{ts}(t,s)\in\partial f_0^0(t,s,\bar u(t,s),\ p(t,s))$,

2) $p(t,s)=\int_0^s A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds+\int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt+v(t,s)$,

3) $$v_t(t,0)-\dot v_1(t)\in\partial\varphi_1^0(\mathrm{t},\overline{\mathrm{u}}(\mathrm{t},0),v_1(t)-\int_0^S A_1^*(\mathrm{t},\mathrm{s})p(t,s)ds),$$

4) $$v_s(0,s)-\dot v_2(s)\in\partial\varphi_2^0(\mathrm{s},\overline{\mathrm{u}}(0,\mathrm{s}),v_2(s)-\int_0^T A_2^*(\mathrm{t},\mathrm{s})p(t,s)dt),$$

5) $(\mathrm{v}(0,0)-\mathrm{v}_1(0)-\mathrm{v}_2(0),\mathrm{v}_1(\mathrm{T})-\mathrm{v}(\mathrm{T},0),\mathrm{v}_2(\mathrm{S})-\mathrm{v}(0,\mathrm{S}),\mathrm{v}(\mathrm{T},\mathrm{S}))\in$
$\in\partial\mathrm{q}(\overline{\mathrm{u}}(0,0),\overline{\mathrm{u}}(\mathrm{T},0),\overline{\mathrm{u}}(0,\mathrm{S}),\overline{\mathrm{u}}(\mathrm{T},\mathrm{S})),$

6) $\mathrm{f}_0^0(\mathrm{t},\mathrm{s},\overline{\mathrm{u}}(\mathrm{t},\mathrm{s}),\mathrm{p}(\mathrm{t},\mathrm{s}))=(\mathrm{p}(\mathrm{t},\mathrm{s})|\mathrm{A}_1(\mathrm{t},\mathrm{s})\overline{\mathrm{u}}_\mathrm{t}(\mathrm{t},\mathrm{s})+\mathrm{A}_2(\mathrm{t},\mathrm{s})\overline{\mathrm{u}}_\mathrm{s}(\mathrm{t},\mathrm{s})+\overline{\mathrm{u}}_{\mathrm{ts}}(\mathrm{t},\mathrm{s}))+$
$+\mathrm{f}_0(\mathrm{t},\mathrm{s},\overline{\mathrm{u}}(\mathrm{t},\mathrm{s}),\mathrm{A}_1(\mathrm{t},\mathrm{s})\overline{\mathrm{u}}_\mathrm{t}(\mathrm{t},\mathrm{s})+\mathrm{A}_2(\mathrm{t},\mathrm{s})\overline{\mathrm{u}}_\mathrm{s}(\mathrm{t},\mathrm{s})+\overline{\mathrm{u}}_{\mathrm{ts}}(\mathrm{t},\mathrm{s})),$

7) $$\varphi_1^0(\mathrm{t},\overline{\mathrm{u}}(\mathrm{t},0),\mathrm{v}_1(\mathrm{t})-\int_0^S \mathrm{A}_1^*(\mathrm{t},\mathrm{s})\mathrm{p}(\mathrm{t},\mathrm{s})\mathrm{ds})=$$
$$=(\mathrm{v}_1(\mathrm{t})-\int_0^S \mathrm{A}_1^*(\mathrm{t},\mathrm{s})\mathrm{p}(\mathrm{t},\mathrm{s})\mathrm{ds}|\overline{\mathrm{u}}_\mathrm{t}(\mathrm{t},0))+\varphi_1(\mathrm{t},\overline{\mathrm{u}}(\mathrm{t},0),\overline{\mathrm{u}}_\mathrm{t}(\mathrm{t},0)),$$

8) $$\varphi_2^0(\mathrm{s},\overline{\mathrm{u}}(0,\mathrm{s}),\mathrm{v}_2(\mathrm{s})-\int_0^T \mathrm{A}_2^*(\mathrm{t},\mathrm{s})\mathrm{p}(\mathrm{t},\mathrm{s})\mathrm{dt})=$$
$$=(\mathrm{v}_2(\mathrm{s})-\int_0^T \mathrm{A}_2^*(\mathrm{t},\mathrm{s})\mathrm{p}(\mathrm{t},\mathrm{s})\mathrm{dt}|\overline{\mathrm{u}}_\mathrm{s}(0,\mathrm{s}))+\varphi_2(\mathrm{s},\overline{\mathrm{u}}(0,\mathrm{s}),\overline{\mathrm{u}}_\mathrm{s}(0,\mathrm{s})).$$

Доказательство. Достаточность теоремы непосредственно проверяется.

Необходимость. Если положив $\tilde{\mathrm{u}}(\mathrm{t},\mathrm{s})=\overline{\mathrm{u}}(\mathrm{t},\mathrm{s})$, то теорема 2.2 доказывается аналогично теореме 2.1. Аналогично теореме 2.1 проверяется для функционала $J_2(u)$ удовлетворяются условия теоремы 6.2[12]. Применяя теорему 6.2[14] к $J_2(u)$ в точке $\overline{\mathrm{u}}$ получим, что существуют $\mathrm{p}(\cdot)\in\mathrm{L}_{\mathrm{p}'}^{\mathrm{n}}([0,\mathrm{T}]\times[0,\mathrm{S}])$, $\mathrm{v}(\cdot)\in\mathrm{A}_1^{\mathrm{n}}([0,\mathrm{T}]\times[0,\mathrm{S}])$, $\mathrm{v}_1(\cdot)\in\mathrm{W}_{1,1}^{\mathrm{n}}[0,\mathrm{T}]$, $\mathrm{v}_2(\cdot)\in\mathrm{W}_{1,1}^{\mathrm{n}}[0,\mathrm{S}]$ и $\mathrm{v}(\mathrm{T},\mathrm{s})=\mathrm{v}(\mathrm{t},\mathrm{S})=\mathrm{const}$ при $\mathrm{t}\in[0,\mathrm{T}]$, $\mathrm{s}\in[0,\mathrm{S}]$ такие, что выполняются соотношения 1)-8) теоремы 2.2.

Пусть X и Y банаховы пространства и $\mathrm{g}:\mathrm{X}\times\mathrm{Y}\to\mathrm{R}_{+\infty}$ собственная выпуклая функция. Положим $\mathrm{g}^0(\mathrm{x},\mathrm{y}^*)=\inf\{\langle\mathrm{y}^*,\mathrm{y}\rangle+\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y}):\mathrm{y}\in\mathrm{Y}\}$ при $\mathrm{y}^*\in\mathrm{Y}^*$. Из предложения 2.5[6] следует, что $\mathrm{x}\to\mathrm{g}^*(\mathrm{x},\mathrm{y}^*)$ выпуклая функция.

Лемма 2.1. Если $\mathrm{g}:\mathrm{X}\times\mathrm{Y}\to\mathrm{R}_{+\infty}$ собственная выпуклая функция, то $(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*)\in\partial\mathrm{g}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$ в том и только в том случае, когда $\mathrm{x}^*\in\partial\mathrm{g}^0(\mathrm{x}_0,-\mathrm{y}^*)$ и $\mathrm{g}^0(\mathrm{x}_0,-\mathrm{y}^*)=\langle-\mathrm{y}^*,\mathrm{y}_0\rangle+\mathrm{g}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$.

Используя лемму 2.1 теоремы 2.2 можно написать в следующем виде.

Теорема 2.3. Пусть $f_0:[0,T]\times[0,S]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$, $\varphi_1:[0,T]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$, $\varphi_2:[0,\mathrm{S}]\times\mathrm{R}^{2\mathrm{n}}\to\mathrm{R}_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, $\mathrm{q}:\mathrm{R}^{4\mathrm{n}}\to\mathrm{R}_{+\infty}$ выпуклая функция. Для того чтобы $\overline{u}$ являлась точкой минимума функционала $J(u)$ на пространстве $A_p^n([0,T]\times[0,S])$, $1\le p<\infty$, достаточно, а если при $\tilde{u}(t,s)=\bar{u}(t,s)$ удовлетворяются условия теоремы 2.1 и необходимо, чтобы нашлись функции $p(\cdot)\in L_{p'}^n([0,T]\times[0,S])$, $v(\cdot)\in A_1^n([0,T]\times[0,S])$, $v_1(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$, $v_2(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,S]$ и $v(T,s)=v(t,S)=\text{const}$ при $t\in[0,T]$, $s\in[0,S]$ такие, что

1) $(v_{ts}(t,s),-p(t,s))\in\partial f_0(t,s,\bar{u}(t,s),A_1(t,s)\bar{u}_t(t,s)+A_2(t,s)\bar{u}_s(t,s)+\bar{u}_{ts}(t,s))$,

2) $p(t,s)=\int_0^s A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds+\int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt+v(t,s)$,

3) $$(v_t(t,0)-\dot{v}_1(t),\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds-v_1(t))\in\partial\varphi_1(t,\bar{u}(t,0),\bar{u}_t(t,0)),$$

4) $$v_s(0,s)-\dot{v}_2(s),\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt-v_2(s))\in\partial\varphi_2(s,\bar{u}(0,s),\bar{u}_s(0,s)),$$

5) $(v(0,0)-v_1(0)-v_2(0),v_1(T)-v(T,0),v_2(S)-v(0,S),v(T,S))\in$
$\in\partial q(\bar{u}(0,0),\bar{u}(T,0),\bar{u}(0,S),\bar{u}(T,S))$.

3. **О минимизации невыпуклого функционала типа Гурса-Дарбу**

Пусть $f_0:[0,T]\times[0,S]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$, $\varphi_1:[0,T]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$, $\varphi_2:[0,S]\times R^{2n}\to R_{+\infty}$ нормальные интегранты, $q:R^{4n}\to R_{+\infty}$ функция.

Рассмотрим минимизации функционала типа Гурса-Дарбу

$$J(u)=\int_0^T\int_0^S f_0(t,s,u(t,s),A_1(t,s)u_t(t,s)+A_2(t,s)u_s(t,s)+u_{ts}(t,s))dtds+$$
$$+\int_0^T\varphi_1(t,u(t,0),u_t(t,0))dt+\int_0^S\varphi_2(s,u(0,s),u_s(0,s))ds+q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S)) \qquad (6)$$

в пространстве $A_p^n([0,T]\times[0,S])$, где $1\le p<+\infty$.

Требуется найти необходимое условие оптимальности решения задачи (6).

Пусть $1\le p<+\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $L_1^+([0,T]\times[0,S])=\{k(\cdot)\in L_1([0,T]\times[0,S]):k(t,s)\ge 0\}$.

Лемма 3.1. Если функции $(t,s)\to f_0(t,s,z,z_1)$, $t\to\varphi_1(t,u_1,u_2)$, $s\to\varphi_2(s,\upsilon_1,\upsilon_2)$ измеримы при $z,z_1\in R^n$, $u_1,u_2\in R^n$, $\upsilon_1,\upsilon_2\in R^n$, существуют функции $k(\cdot)\in L_1^+([0,T]\times[0,S])$, $c(\cdot)\in L_{p'}^+([0,T]\times[0,S])$, $k_1(\cdot)\in L_1^+[0,T]$, $k_2(\cdot)\in L_1^+[0,S]$, $c_1(\cdot)\in L_{p'}^+[0,T]$, $c_2(\cdot)\in L_{p'}^+[0,S]$, числа $\lambda>0$ и $\alpha>0$ такие, что

$$|f_0(t,s,\upsilon,\upsilon_1)-f_0(t,s,w,w_1)|\le k(t,s)\|\upsilon-w\|+c(t,s)\|\upsilon_1-w_1\|,$$
$$|\varphi_1(t,x,y)-\varphi_1(t,x_1,y_1)|\le k_1(t)\|x-x_1\|+c_1(t)\|y-y_1\|,$$

$|\varphi_2(s,\tilde{x},\tilde{y})-\varphi_2(s,\tilde{x}_1,\tilde{y}_1)|\le k_2(s)\|\tilde{x}-\tilde{x}_1\|+c_2(s)\|\tilde{y}-\tilde{y}_1\|$,

$|q(u_1,u_2,u_3,u_4)-q(z_1,z_2,z_3,z_4)|\le\lambda(\|u_1-z_1\|+\|u_2-z_2\|+\|u_3-z_3\|+\|u_4-z_4\|)$

при $\|\upsilon-\bar{u}(t,s)\|\le\alpha$, $\|w-\bar{u}(t,s)\|\le\alpha$, $\upsilon_1,w_1\in R^n$, $\|x-\bar{u}(t,0)\|\le\alpha$, $\|x_1-\bar{u}(t,0)\|\le\alpha$, $y,\ y_1\in R^n$, $\|\tilde{x}-\bar{u}(0,s)\|\le\alpha$, $\|\tilde{x}_1-\bar{u}(0,s)\|\le\alpha$, $\tilde{y},\ \tilde{y}_1\in R^n$, $\|u_1-\bar{u}(0,0)\|\le\alpha$, $\|z_1-\bar{u}(0,0)\|\le\alpha$, $\|u_2-\bar{u}(T,0)\|\le\alpha$, $\|z_2-\bar{u}(T,0)\|\le\alpha$, $\|u_3-\bar{u}(0,S)\|\le\alpha$, $\|z_3-\bar{u}(0,S)\|\le\alpha$, $\|u_4-\bar{u}(T,S)\|\le\alpha$, $\|z_4-\bar{u}(T,S)\|\le\alpha$ и $J(\bar{u})$ конечен, то функционал $J(u)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $\bar{u}(\cdot)$ в $A_p^n([0,T]\times[0,S])$, где $1\le p<+\infty$.

Пусть X банахово пространство, $g:X\to R_{+\infty}$, $x_0\in\operatorname{dom}g$. Если g липшицева функция вблизи x_0, то положим (см.[15, с.32])

$$g^{[1]}(x_0;x)=\limsup_{y\to x_0,\ \lambda\downarrow 0}\frac{g(y+\lambda x)-g(y)}{\lambda},$$

$$\partial_C g(x_0)=\{x^*\in X^*: g^{[1]}(x_0;x)\ge\langle x^*,x\rangle \text{ при } x\in X\}.$$

Обозначим $\partial_C f(t,x,y)=\partial_C f_t(x,y)$.

Теорема 3.1. Если выполняются условия леммы 3.1 и $\bar{u}(t,s)$ минимизирует функционал $J(u)$ в окрестности точки $\bar{u}(\cdot)$ в пространстве $A_p^n([0,T]\times[0,S])$, где $1\le p<+\infty$, то существуют функции

$p(\cdot)\in L_{p'}^n([0,T]\times[0,S])$, $v(\cdot)\in A_1^n([0,T]\times[0,S])$, $v_1(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$, $v_2(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,S]$ и $v(T,s)=v(t,S)=const$ при $t\in[0,T]$, $s\in[0,S]$ такие, что

1) $(v_{ts}(t,s),-p(t,s))\in\partial_C f_0(t,s,\bar{u}(t,s),A_1(t,s)\bar{u}_t(t,s)+A_2(t,s)\bar{u}_s(t,s)+\bar{u}_{ts}(t,s))$,

2) $p(t,s)=\int_0^s A_1^*(t,\nu)p(t,\nu)d\nu-\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds+\int_0^t A_2^*(\tau,s)p(\tau,s)d\tau-\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt+v(t,s)$,

3) $(v_t(t,0)-\dot{v}_1(t),\int_0^S A_1^*(t,s)p(t,s)ds-v_1(t))\in\partial_C\varphi_1(t,\bar{u}(t,0),\bar{u}_t(t,0))$,

4) $v_s(0,s)-\dot{v}_2(s),\int_0^T A_2^*(t,s)p(t,s)dt-v_2(s))\in\partial_C\varphi_2(s,\bar{u}(0,s),\bar{u}_s(0,s))$,

5) $(v(0,0)-v_1(0)-v_2(0),v_1(T)-v(T,0),v_2(S)-v(0,S),v(T,S))\in$
$\in\partial_C q(\bar{u}(0,0),\bar{u}(T,0),\bar{u}(0,S),\bar{u}(T,S))$.

Доказательство. По условию существует число $\alpha_0>0$ такое, что $J(\bar{u})$ конечен и $J(\bar{u})\le J(u)$ при $u\in A_p^n([0,T]\times[0,S])$, $\|u-\bar{u}\|_{A_p^n}\le\alpha_0$. По лемме 3.1 функционал $J(u)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки

$\bar{u}(\cdot)$ в $A_p^n([0,T]\times[0,S])$. Поэтому $J^{[1]}(\bar{u};u)\geq 0$ при $u(\cdot)\in A_p^n([0,T]\times[0,S])$. По теореме Фату (см.[3, с.97]) имеем, что

$$J^{[1]}(\bar{u};u)=\limsup_{\substack{\upsilon\to\bar{u}\\ \lambda\downarrow 0}}\frac{J(\upsilon+\lambda u)-J(\upsilon)}{\lambda}\leq G(u)=\int_0^T\int_0^S f_0^{[1]}(t,s,(\bar{u}(t,s),A_1(t,s)\bar{u}_t(t,s)+A_2(t,s)\bar{u}_s(t,s)+$$

$$+\bar{u}_{ts}(t,s));(u(t,s),A_1(t,s)u_t(t,s)+A_2(t,s)u_s(t,s)+u_{ts}(t,s)))dtds+$$

$$+\int_0^T\varphi_1^{[1]}(t,(\bar{u}(t,0),\bar{u}_t(t,0));(u(t,0),u_t(t,0)))dt+\int_0^S\varphi_2^{[1]}(s,(\bar{u}(0,s),\bar{u}_s(0,s));(u(0,s),u_s(0,s)))ds+$$

$$+q^{[1]}((\bar{u}(0,0),\bar{u}(T,0),\bar{u}(0,S),\bar{u}(T,S));(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S))).$$

при $u(\cdot)\in A_p^n([0,T]\times[0,S])$. Так как $u(t,s)=0$ минимизирует функционал $J^{[1]}(\bar{u};u)$ в $A_p^n([0,T]\times[0,S])$, то $u(t,s)=0$ также минимизирует функционал $G(u)$ в $A_p^n([0,T]\times[0,S])$. Легко проверяется для функционала $G(u)$ также выполняются условия теоремы 2.3. Поэтому существуют функции $p(\cdot)\in L_{p'}^n([0,T]\times[0,S])$, $v(\cdot)\in A_1^n([0,T]\times[0,S])$, $v_1(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$, $v_2(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,S]$ и $v(T,s)=v(t,S)=const$ при $t\in[0,T]$, $s\in[0,S]$ такие, что выполнены соотношения 1) - 5) теоремы 2.3. Теорема доказана.

Литература

1. Tuan H.D. On solution sets of nonconvex Darboux problems and applications to optimal control with endpoint constraints, J.Austral.Math.Soc. Ser., V.37, (1996), pp.354-391.
2. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями, М.: Наука, (1977), 624 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая Теория, М.: ИЛ, (1964), 895 с.
4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач, М.: Наука, (1974), 479 с.
5. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ, М.: Наука, (1988), 280 с.
6. Обен Ж.П. Нелинейный анализ и его экономические приложения, М.: Мир, (1988), 264 с.
7. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ, М.: Мир, (1988), 510 с.
8. Садыгов М.А. Негладкий анализ и его приложения к экстремальной задаче для включения типа Гурса-Дарбу, Баку: Элм, (1999), 135 с.
9. Садыгов М.А. О минимизации интегральных функционалов в пространствах Соболева, Изв. АН Азерб. ССР, сер.физ.-техн. и матем.наук., (1985), N.6, с.33-47.
10. Садыгов М.А. О субдифференциале функционала типа Гурса-Дарбу,Annali d′Italia, (2024), N.42, с.32-49.

11. Садыгов М.А. Об экстремальные задачи для двумерных дфференциальных включений, Изв. АН Азербайджана, сер.физ.-техн. и матем. наук., (1995), N.1-3, с.71-81.
12. Садыгов М.А. Свойства оптимальных траекторий дифференциальных включений, Канд. дис. Баку, (1983), 116 с.
13. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для включений в частных производных, Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, (2015), 390 с.
14. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем, Баку, (1996), 148 с.
15. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, (1979), 400 с.

ON THE EXTREME PROBLEM OF GOURSAT-DARBOUX TYPE

M.A. SADYGOV

Institute of Applied Mathematics of Baku State University, Baku, Azerbaijan

Abstract. In this paper, a nonsmooth variational problem of a special form of Gursa-Darbu type is considered and a necessary and sufficient condition for the optimality of its solution are obtained. First, a convex variational problem of a special form of Gursa-Darbu type is studied, and with its help a non-convex variational problem of a special form of Gurs-Darbu type is studied.

Keywords: Variational problem, Goursat-Darboux, Necessary condition.

References

1. Tuan H.D. On solution sets of nonconvex Darboux problems and applications to optimal control with endpoint constraints, J.Austral.Math.Soc. Ser., 37, (1996), pp.354-391.
2. Varga Dzh. Optimal'noe Upravlenie Differentsial'nymi i Funktsional'nymi Uravneniyami, M.: Nauka, (1977), 624 s. (Varga J. Optimal control of Differential and Functional Equations, M.: Nauka, (1977), 624 p.)
3. Danford N., Shvarts Dzh.T. Lineynye Operatory. Obshchaya Teoriya, M.: IL, (1964), 895 s. (Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators. General Theory, M.: IL, (1964), 895 p.)
4. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. Teoriya Ekstremal'nykh Zadach, M.: Nauka, (1974), 479 s. (Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. Theory of Extremal Problems, M.: Nauka, (1974), 479 p.)
5. Klark F. Optimizatsiya i Negladkiy Analiz, M.: Nauka, (1988), 280 s. (Clark F. Optimization and Nonsmooth analysis, M.: Nauka, (1988), 280 s.)
6. Oben Zh.P. Nelineynyy Analiz i ego Ekonomicheskie Prilozheniya, M.: Mir, (1988), 264 s. (Oben J.P. Nonlinear Analysis and its Economic Applications. -M.: Mir, (1988), 264 s.)

7. Oben Zh.P., Ekland I. Prikladnoy Nelineynyy Analiz, M.: Mir, (1988), 510 s.(Aubin J.P., Ekland I. Applied Nonlinear Analysis, M.: Mir, (1988), 510 p.)
8. Sadygov M.A. Negladkiy Analiz i ego Prilozheniya k Ekstremal'noy Zadache dlya vklyuCheniya Tipa Gursa-Darbu, Baku: Elm, (1999), 135 s.(Sadygov M.A. Nonsmooth Analysis and its Applications to the Extremal Problem for Inclusion of Goursat-Darboux Type, Baku: Elm, (1999), 135 p.)
9. Sadygov M.A. O minimizatsii integral'nykh funktsionalov v prostranstvakh Soboleva, Izv. AN Azerb. SSR, ser.fiz.-tekhn. i matem.nauk., N.6, (1985), s.33-47.(Sadygov M.A. On the minimization of integral functionals in Sobolev spaces, Izv. AN Azerbaijan. SSR, Ser. Phys.-Tech. and Mathematical Sciences, N.6, (1985), pp.33-47.)
10. Sadygov M.A. O subdifferentsiale funktsionala tipa Gursa-Darbu, Annali Italia, N.42, (2024), s.32-49.(Sadigov M.A. On the subdifferential of a functional of Goursat-Darboux type, Annali Italia, N.42, (2024), pp.32-49)
11. Sadygov M.A. Ob ekstremal'nye zadachi dlya dvumernykh dfferentsial'nykh vklyucheniy, Izv. AN Azerbaydzhana, ser.fiz.-tekhn. i matem. nauk., N.1-3, (1995), s.71-81(Sadygov M.A. On extremal problems for two-dimensional differential inclusions, Izv. Academy of Sciences of Azerbaijan, Ser.Phys.-Techn. and math. nauk., N. 1-3, (1995), pp.71-81)
12. Sadygov M.A. Svoystva optimal'nykh traektoriy differentsial'nykh vklyucheniy, Kand. dis. Baku, (1983), 116 s. (Sadygov M.A. Properties of optimal trajectories of differential inclusions, Cand. dis. Baku, (1983), 116 s.)
13. Sadygov M.A. Ekstremal'nye zadachi dlya vklyucheniy v chastnykh proizvodnykh. Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, (2015), 390 s. (Sadygov M.A. Extremal problems for inclusions in partial derivatives. Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, (2015), 390 s.)
14. Sadygov M.A. Ekstremal'nye zadachi dlya negladkikh system, Baku, (1996), 148 s. (Sadygov M.A. Extremal problems for nonsmooth systems, Baku, (1996), 148 p.)
15. Ekland I., Temam R. Vypuklyy analiz i variatsionnye problem, M.: Mir, (1979), 400 s. (Ekland I., Temam R. Convex analysis and variational problems. M.: Mir, (1979), 400 p).